Werner Kratz
Marius Hofert

Universität Ulm
Wintersemester 2008/2009
29.01.2009

Übungen zur Analysis 2

Blatt 15

Abgabe, Donnerstag, den 05.02.2009

Aufgabe 68* (8 Punkte)

Untersuche, ob folgende Vektorfelder f konservativ in M sind. Berechne gegebenenfalls eine Stammfunktion und berechne ${}^{k}\!\!\int f$ für die jeweils angegebene(n) Kurve(n) k mit Parametrisierung $x(t)$.

(a) $M = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix} \right) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, y > 0 \right\}$, $f(x,y,z) = (z^2, \frac{e^z}{y} + y, 2xz + e^z \log y)$, $k : x(t) = \left(\begin{smallmatrix} \cos t \\ 2+\sin t \\ t \end{smallmatrix} \right)$, $0 \le t \le 2\pi$.

(b) $M = \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (y^2, x^3)$, $k : x(t) = \left(\begin{smallmatrix} t \\ t^2 \end{smallmatrix} \right)$, $0 \le t \le 1$.

(c) $M = \mathbb{R}^2 \backslash \{ \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right) \}$, $f(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$,

(i) $k : x(t) = \left(\begin{smallmatrix} \sin t \\ \cos t \end{smallmatrix} \right)$, $0 \le t \le \frac{3}{2}\pi$.

(ii) $k : x(t) = \left(\begin{smallmatrix} -t \\ 1-t \end{smallmatrix} \right)$, $0 \le t \le 1$.

(d) $M = \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, $n \ge 2$, $f(x) = \frac{x^T}{|x|}$, $k : x(t) = (t, \dots, t)^T$, $0 \le t \le 1$.

Aufgabe 69* (6 Punkte)

Gegeben sei das zweidimensionale Flächenstück $\mathcal{F}$, ein *Möbiusband*, mit Parametrisierung

$$\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} (1+\frac{u}{2}\cos\frac{v}{2})\cos v \\ (1+\frac{u}{2}\cos\frac{v}{2})\sin v \\ \frac{u}{2}\sin\frac{v}{2} \end{pmatrix}, \ -1 \le u \le 1, \ 0 \le v \le 2\pi,$$

wobei sich die „geometrischen Randkurve“ $\partial\mathcal{F}$ für $u \in \{-1, 1\}$ und $0 \le v \le 2\pi$ ergibt, d.h. $\partial\mathcal{F} = k_1 + k_2$ mit

$$k_1 : x_1(t) = \begin{pmatrix} (1-\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2})\cos t \\ (1-\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2})\sin t \\ -\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2} \end{pmatrix}, \ 0 \le t \le 2\pi, \quad k_2 : x_2(t) = \begin{pmatrix} (1+\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2})\cos t \\ (1+\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2})\sin t \\ \frac{1}{2}\sin\frac{t}{2} \end{pmatrix}, \ 0 \le t \le 2\pi.$$

Weiter sei $f(x,y,z) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0 \right)$ für $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix} \right) \in M := \mathbb{R}^3 \backslash \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{smallmatrix} \right) \,\middle|\, z \in \mathbb{R} \right\}$.

(a) Berechne $\operatorname{rot} f$ und $\int_{\mathcal{F}} \operatorname{rot} f \cdot n \, d\sigma$.

(b) Berechne ${}^{\partial\mathcal{F}}\!\!\int f$.

Aufgabe 70$^\bigstar$ (6 Punkte)

(a) Verifiziere den Gaußschen Integralsatz im $\mathbb{R}^3$ für das Vektorfeld $f(x, y, z) = (x, y, z)$ und die Kugel $M = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \right\}$.

(b) Verifiziere den Stokesschen Integralsatz für das Vektorfeld $f(x, y, z) = (y, -x, z)$ und die obere Halbkugel $M = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ z \geq 0 \right\}$.